素粒子の対称性と物理法則

ー　重力場の量子化と質量素荷の発見　ー

河野　誠公　著

はしがき

アインシュタインの相対性原理、すなわち、慣性系間の物理の同等性によりローレンツ変換が導かれ、時空間のグローバルな（大域的）対称性である並進と回転対称性に基づくエネルギー・運動量と角運動量が保存演算子（対称性生成子）として導かれる。エネルギー・運動量保存則から導かれる電子の波動方程式では、その表現にスピノール（回転子）表現が必然的に現われ、角運動量保存則からは電子が固有スピン $s = 1/2\,\hbar$ を保有することが導かれる。電磁場中の電子の波動方程式では、電子と電磁ポテンシャルの相互作用項に結合定数として電荷が現れる。この電荷は弱い相互作用へ拡張するとフェルミオンを交換する局所（ローカル）変換群の生成子で構成されることが導かれる。

本書では、局所的対称性の起源として、スピノールの回転方向を表すヘリシティに着目する。その対称性が真空に由来するものと考え、真空をスピノールで構成されるスピン空間として捉える。この真空に（超対称性）生成子を作用させると、フェルミオンである物質粒子だけでなくボソンを含む既知の全ての素粒子が生成される。ヘリシティの組合せにより量子数である電荷とカラー荷も自然に定義できることを見る。更に、重力ゲージ場を量子化したスピン接続とアフィン接続とで構成すると、重力ゲージ変換において２つの接続のゲージ位相差とヘリシティの組合せにより、新たな素荷「質量チャージ」が導かれる。この「質量チャージ」を用いた質量表現により μ, τ レプトンと６種のクォークの質量が特定できること、物質粒子３世代間の「質量チャージ」の交換によりクォーク３世代混合とニュートリノ振動（3 世代混合）における３つの混合角が統一的に特定できることを示す。

本書の前半（第１章～第３章）では、物理法則と対称性について復習しておく。[1),2),3),4)]　第１章ではローレンツ群のリー代数を復習し、第５章の議論で重要となるローレンツ不変量として現れるヘリシティについてのトポロジー的考察を復習する。第２章ではディラック方程式と電磁場の

Maxwell 方程式の導出を振り返る。第３章では電磁相互作用と弱い相互作用を振り返り、局所的対称性であるゲージ対称性と２つのフェルミオンから成る場を混合する局所変換群について復習する。

本書の後半（第４章～第７章）では、前半の議論の物理法則と対称性の内、特に局所的対称性の議論を発展させ新たな素粒子論を展開する。[5),6),7)] 第４章では､先ず(n+1)個のヘリシティの組合せ状態を真空状態として定義する。その真空に超対称性生成子を作用させることにより、既知の全ての素粒子がローレンツ群の表現の枠組みの中で構成される。第５章の前半は重力ゲージ場の正準量子化に費やす。その後半で重力ゲージ場を構成するスピン接続とアフィン接続のゲージ位相にゼロでない位相差が現れることを第１章で復習したローレンツ群のトポロジー的考察を応用して導く。この位相差により物質粒子 3 世代の階層構造をもたらす新たな素荷「質量チャージ」が導かれる。第６章ではこの「質量チャージ」を用いて 3 世代レプトン及びクォーク２重項の質量表現を導き､それぞれの質量を特定する。各々の質量データベース値[10)]と比較すると、μ, τ 粒子では高い精度で、6 種のクォークではデータの上下限値内で一致する。第７章では 3 世代間での「質量チャージ」の交換を考えることにより、クォーク 3 世代混合とニュートリノ振動のそれぞれの 3 つの混合角が特定でき、それらの現象とクォークとニュートリノ混合との相違が統一的に説明できることを見る。

本書は先に執筆した「標準モデルを超える新たな素粒子論」[5),6)] を物理法則と対称性の視点から再構成したものとなっている。前書は標準モデルの抱える幾つかの問題を解決することが主目的であり、やや分かりにくいものとなった。本書では先ず先人により築かれた物理法則と対称性を復習し、その延長上で標準モデルの問題点を解消する「新たな素粒子論」を自然な形で展開すべく構成を見直した。従い幾つかの議論では詳細について割愛し前書に委ねた形となったが、全体として分かりやすくなったものと期待する。

2016 年 9 月

河野　誠公

目　次

第１章　４次元時空間の対称性とローレンツ群

１－１．ローレンツ群の生成演算子 [1)]

アインシュタインの相対性原理が出発点となる。慣性系間の物理の同等性により、ある慣性系の座標 x^μ と他の慣性系の座標 x'^μ との間の変換は以下の関係を満たす。

$$\eta_{\mu\nu}\ dx'^\mu\ dx'^\nu = \eta_{\mu\nu}\ dx^\mu\ dx^\nu \tag{1-1}$$

$$\eta_{\mu\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} = \eta_{\rho\sigma} \tag{1-2}$$

ここに、$\eta_{ii}=1$ at $i=1, 2, 3$, $\eta_{00}=-1$ の要素をもつ対角行列

これらの変換は光速 c が全ての慣性系で同じという特別な性質をもつ。すなわち、

$$\eta_{\mu\nu}\ dx^\mu\ dx^\nu = d\mathbf{x}^2 - c^2\,dt^2 = 0$$

$$\therefore\quad \eta_{\mu\nu}\ dx'^\mu\ dx'^\nu = 0 \quad 及び \quad \left|\frac{d\mathbf{x}'}{dt'}\right| = c = 1 \tag{1-3}$$

一般に光速 c＝1 の単位系を選ぶ

(1-2)式を満たす任意の座標変換：$x^\mu \rightarrow x'^\mu$ は以下の線形変換となっている。

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \tag{1-4}$$

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\ \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma} \tag{1-5}$$

ここに、a^μ は定数、$\Lambda^\mu{}_\nu$ は定数行列

(1-4)式の線形変換をローレンツ変換とよび、$T(\Lambda, a)$ で表わす。ローレンツ変換は群を成し以下の合成則を満たす。

$$T(\Lambda', a')\cdot T(\Lambda, a) = T(\Lambda'\Lambda,\ \Lambda' a + a') \tag{1-6}$$

合成則(1-6)は、変換(1-4)を繰り返すことで確かめることができる。
(1-5)式の行列式をとると、

$$(\mathrm{Det}\ \Lambda)^2 = 1 \tag{1-7}$$

よって、定数行列$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ には逆 $(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\rho}$ が存在する。(1-5)式を用いて、

$$(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\rho} = \Lambda_{\nu}{}^{\rho} = \eta_{\nu\mu}(\eta^{\nu\mu}\Lambda^{\rho}{}_{\nu}\Lambda^{\sigma}{}_{\mu})\Lambda^{\mu}{}_{\sigma} = \eta_{\nu\mu}\eta^{\rho\sigma}\Lambda^{\mu}{}_{\sigma} \tag{1-8}$$

と求まる。変換 $T(\Lambda, a)$の逆は合成則(1-6)より、$\Lambda'\Lambda = 1,\ \Lambda' a + a' = 0$ なので、$T(\Lambda^{-1},\ -\Lambda^{-1}a)$ となる。

$$T(\Lambda, a)\cdot T(\Lambda^{-1},\ -\Lambda^{-1}a) = T(1, 0) \tag{1-9}$$

(1-9)式の右辺は恒等変換である。
変換 $T(\Lambda, a)$ の成す群を非斉次ローレンツ群またはポアンカレ群とよぶ。
$a^{\mu} = 0$ のとき、合成則(1-6)は、

$$T(\Lambda', 0)\cdot T(\Lambda, 0) = T(\Lambda'\Lambda, 0) \tag{1-10}$$

となり部分群を成す。この部分群を斉次ローレンツ群とよぶ。
　次に、非斉次ローレンツ群の単位元の近傍の微小変換を調べ、この群のリー代数を導く。$\omega^{\mu}{}_{\nu}$とε^{μ}を微小量として、

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}\ ,\quad a^{\mu} = \varepsilon^{\mu} \tag{1-11}$$

この変換の性質を調べる。ローレンツ変換の条件式(1-5)より、

$$\begin{aligned}\eta_{\rho\sigma} &= \eta_{\mu\nu}(\delta^{\mu}{}_{\rho} + \omega^{\mu}{}_{\rho})(\delta^{\nu}{}_{\sigma} + \omega^{\nu}{}_{\sigma}) = \eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\ \Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\\ &= \eta_{\rho\sigma} + \omega_{\sigma\rho} + \omega_{\rho\sigma} + O(\omega^2)\end{aligned}$$

ここに、$\omega_{\sigma\rho}=\eta_{\mu\sigma}\omega^{\mu}{}_{\rho}$, $\omega^{\mu}{}_{\rho}=\eta^{\mu\sigma}\omega_{\sigma\rho}$

$$\therefore \quad \omega_{\mu\nu}=-\omega_{\nu\mu} \tag{1-12}$$

条件式(1-5)は、微小量$\omega_{\mu\nu}$の反対称条件(1-12)に帰着する。
4 次元の反対称テンソルは (4×3) / 2 = 6 個の独立な成分をもつので、ε^{μ}の4成分と合わせて非斉次ローレンツ変換は 10 個のパラメータをもつ。
ここで、ローレンツ変換 T(Λ, a)がユニタリー線形変換 U(1+ω, ε)として物理的ヒルベルト空間の任意のベクトルに作用することを考える。U(1, 0)はそれ自身に変換するので、位相を適当に選ぶと恒等演算子に等しく置くことができる。

$$U(1+\omega,\varepsilon)=1+\frac{1}{2}i\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}-i\varepsilon_{\rho}P^{\rho}+\cdots \tag{1-13}$$

ここに、$J^{\rho\sigma}$とP^{ρ}はそれぞれωとεに依存しない演算子

変換 U(1+ω, ε) はユニタリーなので、$UU^{\dagger}=U^{\dagger}U=1$ より

$$J^{\rho\sigma\dagger}=J^{\rho\sigma}\ , \quad P^{\rho\dagger}=P^{\rho} \tag{1-14}$$

すなわち、$J^{\rho\sigma}$とP^{ρ}はエルミート演算子となっている。更に、$\omega_{\mu\nu}$の反対称条件(1-12)より

$$J^{\rho\sigma}=-J^{\sigma\rho} \tag{1-15}$$

P^1, P^2, P^3 は運動量演算子、P^0はエネルギー演算子、J^{23}, J^{31}, J^{12}は角運動量演算子となっている。このことを確認するため以下のローレンツ変換を調べる。

$$\begin{aligned}
&U(\Lambda,a)\cdot U(1+\omega,\varepsilon)\cdot U^{-1}(\Lambda,a)\\
&\quad =U(\Lambda,a)\cdot U(1+\omega,\varepsilon)\cdot U(\Lambda^{-1},-\Lambda^{-1}a)\\
&\quad =U(\Lambda(1+\omega),\ \Lambda\varepsilon+a)\cdot U(\Lambda^{-1},-\Lambda^{-1}a)\\
&\quad =U(\Lambda(1+\omega)\Lambda^{-1},\ \Lambda\varepsilon-\Lambda\omega\Lambda^{-1}a)
\end{aligned} \tag{1-16}$$

(1-16)式へ(1-13)式を代入し、ωとεについて1次までとる。

$$U(\Lambda, a)\cdot[\ \frac{1}{2}\ \omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}-\varepsilon_{\rho}P^{\rho}\ ]\cdot U^{-1}(\Lambda, a)$$

$$=\frac{1}{2}(\Lambda(1+\omega)\Lambda^{-1})_{\mu\nu}\cdot J^{\mu\nu}-(\Lambda\varepsilon-\Lambda\omega\Lambda^{-1}a)_{\mu}P^{\mu}$$

この式の両辺で$\omega_{\rho\sigma}$とε_{ρ}の係数を比べると、

$$U(\Lambda, a)\,J^{\rho\sigma}U^{-1}(\Lambda, a)=\ \Lambda^{\rho}{}_{\mu}\Lambda^{\sigma}{}_{\nu}(J^{\mu\nu}-a^{\mu}P^{\nu}-a^{\nu}P^{\mu}) \qquad (1\text{-}17)$$

$$U(\Lambda, a)\,P^{\rho}U^{-1}(\Lambda, a)=\ \Lambda^{\rho}{}_{\mu}P^{\mu} \qquad (1\text{-}18)$$

この２式に対し、再び微小変換（$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}=\delta^{\mu}{}_{\nu}+\omega^{\mu}{}_{\nu}$, $a^{\mu}=\varepsilon^{\mu}$)を適用し$\omega^{\mu}{}_{\nu}$と$\varepsilon^{\mu}$について１次まで残し、それらの係数を両辺で比べると以下の交換関係を得る。

$$i\,[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}]=\ \eta^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}-\eta^{\mu\rho}J^{\nu\sigma}-\eta^{\sigma\mu}J^{\rho\nu}+\eta^{\sigma\nu}J^{\rho\mu} \qquad (1\text{-}19)$$

$$i\,[P^{\mu}, J^{\rho\sigma}]=\ \eta^{\mu\rho}P^{\sigma}-\eta^{\mu\sigma}P^{\rho} \qquad (1\text{-}20)$$

$$[P^{\mu}, P^{\rho}]=0 \qquad (1\text{-}21)$$

量子力学では、保存演算子はハミルトニアン、すなわちエネルギー演算子$H=P^{0}$と可換な演算子となるので、(1-20), (1-21)式より

$$[\,P^{0}, P^{i}\,]=0\quad \text{at}\quad i=1,2,3\quad \text{and}\quad i=0 \qquad (1\text{-}22)$$

$$i\,[\,P^{0}, J^{23}\,]=i\,[\,P^{0}, J^{31}\,]=i\,[\,P^{0}, J^{12}\,]=0 \qquad (1\text{-}23)$$

$$i\,[\,P^{0}, J^{i0}\,]\ \neq\ 0\quad \text{at}\quad i=1,2,3 \qquad (1\text{-}24)$$

よって、4 元運動量ベクトルP^{μ}と 3 元角運動量ベクトル$\mathbf{J}=\{J^{23}, J^{31}, J^{12}\}$が保存演算子となる。非斉次ローレンツ変換の 10 個のパラメータの残る 3 成分は、3 元ブースト演算子$\mathbf{K}=\{J^{10}, J^{20}, J^{30}\}$であり(1-24)式より保存しない。(1-22)～(1-24)の交換関係が非斉次ローレンツ群のリー代数である。