常微分方程式と偏微分方程式を解いてみよう

Let’s Try Seeking the Solutions of Ordinary and Partial Differential Equations

理学博士　古 市　堯 久 著
Takahisa　Furuichi,　Sc.D.

巻　頭　言

方程式には，大きく分けると，代数方程式と関数方程式がある。**代数方程式**は，有限個数の未知数の値（定数値）を求めるものである。２つの変数 x, y があるとき，x が変動するとき，y も変動すれば，y は x の関数であると言う。**関数方程式**は，x の関数である y が如何なる形の x の関数であるかを求めるものである。従って，関数方程式は，$x, y, d^n y / dx^n; \int_a^x y dx$ を結合した方程式と言うことになる。このとき，y は x の従属変数と言われる。

もう 1 度，言い直せば，**代数方程式**は未知数（独立変数の値＝定数値）を求めるのに対し，**関数方程式**は，（従属変数の独立変数による関数形）を求めるものである。

この関数方程式の中に，**微分方程式**（この方程式の中に，独立変数と従属変数と従属変数の独立変数に対する微分係数を含むもの）と**積分方程式**（この方程式の中に，独立変数と従属変数と従属変数の独立変数に対する不定積分を含むもの）がある。

微分方程式も積分方程式も自然現象や社会現象を解明するのに重要なものであるが，この著書では微分方程式に特化して述べることにする。

微分方程式を細分化すると，微分方程式は，独立変数と従属変数を有するが，独立変数の値が 1 個であるものと，複数含むものがある。前者の場合を**常微分方程式**と言い，後者の場合を**編微分方程式**と言う。何故に後者を偏微分方程式と言うかと言えば，この場合の方程式は，2 個以上の独立変数を有するから，仮に独立変数を x, y，従属変数を z とすれば，微分方程式の中に，

$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}; \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}; \cdots\cdots$ 等の偏微分係数を有する項を有するからである。

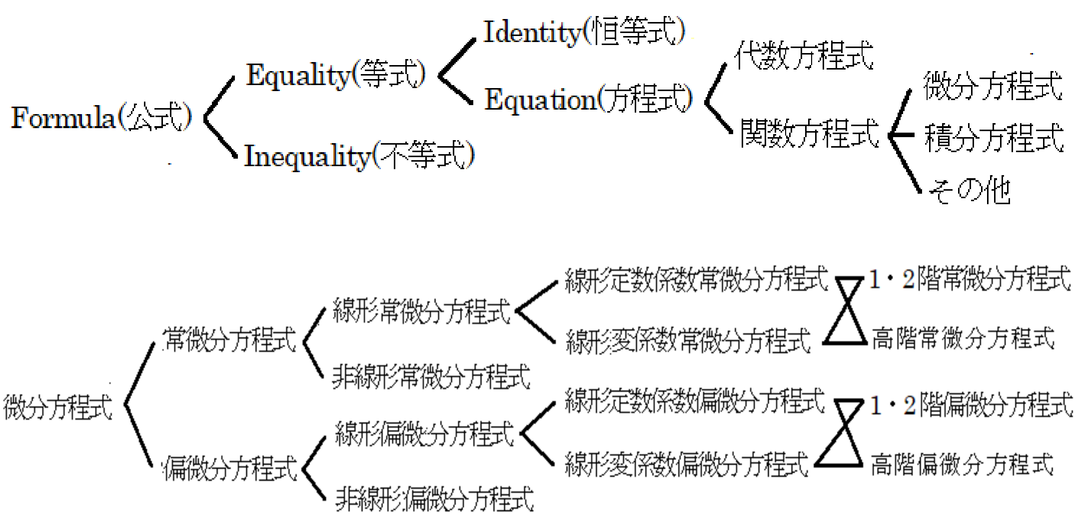
常微分方程式の独立変数に対する微分の最高の回数が n 階であるとき，n **階常微分方程式**と言う。偏微分方程式の独立変数に対する微分の最高の回数が n **階編微分方程式**と言う。

微分方程式を更に細分化すると，微分方程式の中に，独立変数と従属変数を有する外に，独立変数に対する従属変数の冪に対する係数が定数値である定数係数を有するものと，定数値だけでなく独立変数の関数を含むものがある。前者の場合を**定数係数微分方程式**と言い，後者の場合を**変係数微分方程式**と言う。

方程式（Equation）はその中に含まれる未知数（定数値）または 未知関数（ 独立変数に対する関数形 ）を求めるものである。これに対して等式（Equalty），不等式（Inequality），恒等式（Identity），公式（Formula）等の用語がある。これらの用語は少しずつ相違がある。Formula は，Equality, Equation, Identity 等を含むものと考えられる。

代数方程式と微分方程式の分類と関連を次表に示す。

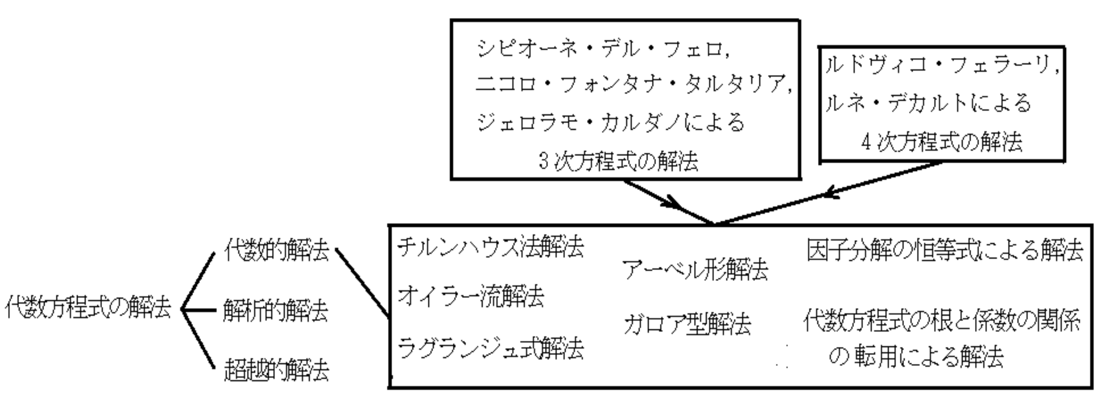
図表１　代数方程式と微分方程式の分類と関連



著者は以上の構想の下に本著を完成させたので，読者の興味を注げれば光栄に存じます。

ちなみに代数方程式の解法は次表に示すようになると思います。

図表２　代数方程式の解法の分類と影響



本 著 の 概 要

「巻頭言」の所でも述べたように，関数方程式の中には，微分方程式や積分方程式があり，本著では，その中の微分方程式について述べた。微分方程式には常微分方程式と偏微分方程式があり，これらも代数方程式と同様に自然現象や社会現象の解明には重要な方程式である。

常微方程式や偏微方程式の解に関する解法も，代数方程式の根に関する解法同様，特殊な解法が存在する。それらを系統的に知って置くことは，重要なことであると，著者は考えており，この著書を記述した。読者の一助になれば，幸いであると著者は考える次第である。

Overview of This Book

As it described in the place of "Prefice", too, there are differential equations and integral equations in functional-equations, and, the author described differential equations in this book.

And there are ordinary differential equations and partial differential equations in differential equations, and these, too, are important equations, like algebraic equations, for clarification of natural phenomena and social phenomena.

Special solutions exist in the solutions of ordinary differential equations and partial differential, like in the roots of algebraic equations.

The author thinks that knowing them systematically is an important thing and describes this book. And the author thinks is happy if these things become some help of readers ' of this book.

微分方程式と偏微分方程式に関する研究

Study on the Ordinary and Partial Diffrential Equations

目　次

第１章
演算子と関数変換による微分方程式の解法について

第２章
関数係数線形常微分方程式と非線形常微分方程式の解法について

第３章
２変数線形偏微分方程式の解法

常微分方程式と偏微分方程式に関する研究
Study on the Ordinary and Partial Diffrential Equations

第１章
演算子と関数変換による微分方程式の解法について
Solution of Differential Equations by using Operators and Function Transformation

１．緒言

２つの変数 x, y があり，変数 x が変動するとき，それに伴い、変数 y が変動するとき，y は x の**関数**と言う。また，変数 x の２つの関数 y, z の間に，$z = f(y)$（z が y の関数になっている）の関係が有るときに，x の関数 y が z へ $z = f(y)$ の関係で**関数変換**されたと言う。関数変換に類似したものに**演算子（作用子）**がある。

$z = f(y)$ は，y が変動すると，z も変動するという（例えば，$z = y^3 + 2y^2 + 3y + 4$） ことを示したものであるが，$z = y^3 + 2y^2 + 3y + 4$ の場合には，$f(y) = y^3 + 2y^2 + 3y + 4$ である。

$z = f(y)$ の関係では，f は $\int_a^x ydx = (\int_a^x ()dx)y$，$y$ は被作用子 (作用子の作用前の変数) であり，z は作用子の作用後の変数である。

作用子の例として，変数の微分，積分の記号等がある。従属変数変数 y の独立変数 x に対する微分記号を $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} y = D_x{}^2$， 積分記号を $\int_a^x ydx = (\int_a^x ()dx)y$ で表すと，$\frac{d^2}{dx^2}, D_x{}^2$ や $\int_a^x ()dx$ が**演算子（作用子）**である。

代数方程式の解は，有限個の**定数としての数値**であるが，微分方程式の解は，定数としての数値ではなく，殆ど連続した無限個と考えられる場合が多い**数値の集合である関数値**を求めるものである。言い換えると，微分方程式は，独立変数の関数である従属関数を解として求めるのである。独立変数の１つの定数および独立変数の微分係数である関数からなる従属変数を求めるのが微分方程式である。

ここで，独立変数が１個である微分方程式が**常微分方程式**である。独立変数が２個以上ある微分方程式が**偏微分方程式**である。なぜ，独立変数が２個以上ある微分方程式を偏微分方程式と言うかと言えば，その微分方程式の中に，独立変数が２個以上あるから，従属変数の独立変数に対する偏微分係数との関係を含んでいるからである。

以下に演算子と関数変換による微分方程式の解法について述べる。

２．１階線形微分方程式の解

$a(x), f(x)$ を $x \geq 0$ において定義された x の連続関数とするとき，１階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx}+a(x)y=f(x) \qquad （1）$$

の $x \geq 0$ における解 $y=y(x)$ を求めることを考えよう。

これには，次の２つの方法がよく知られている。

イ）積分因数を導入して解く方法

（1） の左辺は，$R\ (=R(x))$ を 0 でない，x の関数とするとき，zz

$$\frac{dy}{dx}+a(x)y=\frac{1}{R}\frac{d}{dx}(Ry)+\left\{a(x)-\frac{1}{R}\frac{dR}{dx}\right\}y \qquad （2）$$

と変形されるので，上式の最後の式の第２項を 0，すなわち

$$\frac{dR}{dx}=a(x)R \qquad （3）$$

になるように，x の関数 R を定めれば，（1）は次のようになる。

$$\frac{d}{dx}(Ry)=Rf(x) \qquad （4）$$

（3）を解くと，$dR/R=a(x)dx$ から，$R=\exp(\int a(x)\,dx)$ となる。ここで，C_1 を 0 でない定数とすると，

$$R=C_1\exp(\int_0^x a(\xi)d\xi) \qquad （5）$$

となる。これを（4）に代入すると，C_2 を任意の定数として，y は次のように求まる。

$$y=\frac{1}{R(x)}\left\{\int_0^x f(\xi)R(\xi)d\xi+C_2\right\}=\exp(-\int_0^x a(\xi)d\xi)\left\{\int_0^x f(\xi_1)\exp(\int_0^{\xi_1} a(\xi_2)d\xi_2)d\xi_1+\frac{C_2}{C_1}\right\}$$

ここで，C_2/C_1 を任意の定数 C で置換えると，y は次のように表される。

$$\boldsymbol{y=C\exp(-\int_0^x a(\xi)d\xi)+\exp(-\int_0^x a(\xi)d\xi)\int_0^x f(\xi_1)\exp(\int_0^{\xi_1} a(\xi_2)d\xi_2)d\xi_1} \qquad （6）$$